Representação de números e erros

Conversão: $(d_n d_{n-1}\cdots d_0.d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-k})_b = d_n\times b^n+\cdots+d_1\times b^1+d_0\times b^0+d_{-1}\times b^{-1}+\cdots+d_{-k}\times b^{-k}$

Erros: em que $\bar{p}$ aproxima p;
absoluto $\Delta_{\bar{p}} = |p-\bar{p}|$; relativo $r_{\bar{p}} = \frac{\Delta_{\bar{p}}}{|p|}$.

Propagação:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\bar{p}\pm\bar{q}} \le \Delta_{\bar{p}} + \Delta_{\bar{q}}\\
&r_{\bar{p}+\bar{q}} \le \max\{r_{\bar{p}}, r_{\bar{q}}\}\\
&r_{\bar{p}-\bar{q}} \le r_{\bar{p}}\frac{|p|}{|p-q|} + r_{\bar{q}}\frac{|q|}{|p-q|}\\
&r_{\bar{p}\bar{q}} \le r_{\bar{p}} + r_{\bar{q}} + r_{\bar{p}}r_{\bar{q}}
\end{aligned}$$

Dígitos significativos: d é o maior inteiro tal que $r_{\bar{p}} < 0.5\times 10^{-d}$;

FP$(10,p,q)$: Mantissa m: Se $x=0$ então $m=0$; Se $x\neq 0$ então $10^{-1}\le m<1$;
Se $fl(x) = (0.d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-p})10^k$ por arredondamento, então $|x-fl(x)|\le 0.5\times 10^{k-p}$;
Se $fl(x) = (0.d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-p})10^k$ por truncatura, então $|x-fl(x)|\le 10^{k-p}$.

Polinómio de Taylor: Seja $f\in C^{n+1}[a,b]$, então para algum c entre x_0 e x

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Interpolação Polinomial

Forma de Lagrange de ordem n:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)y_k; \qquad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Forma nas diferenças divididas: $p_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$;

Forma nas diferenças progressivas: $p_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta_h f(x_0)}{h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{2!h^2} + \cdots + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\frac{\Delta_h^n f(x_0)}{n!h^n}$;

Erro de interpolação: Sejam $x_0,\ldots,x_n$ pontos em $[a,b]$ e $f\in C^{n+1}[a,b]$. Então
$e_n(x) = f(x) - p_n(x) =$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

para $x\in[a,b]$ e algum $c\in]a,b[$ e p_n o pol. interpolador em $x_0,\ldots,x_n$.

Spline Cúbico S: tal que $S(x) = S_k(x)$ em $x\in[x_k,x_{k+1}]$, S_k de grau ≤ 3, $k=0,\ldots,n-1$ e onde

$$\begin{aligned}
S(x_k) &= y_k,\ k=0,\ldots,n\\
S_k(x_{k+1}) &= S_{k+1}(x_{k+1}),\ k=0,1,2,\ldots,n-2\\
S_k'(x_{k+1}) &= S_{k+1}'(x_{k+1}),\ k=0,1,2,\ldots,n-2\\
S_k''(x_{k+1}) &= S_{k+1}''(x_{k+1}),\ k=0,1,2,\ldots,n-2
\end{aligned}$$

Integração numérica $I=\int_a^b f(x)\,dx$ Em cada fórmula do erro acrescentar $\exists\xi\in]a,b[$.

Trapézio (simples):

$$I = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(2)}(\xi)$$

Simpson (simples): $c=\frac{a+b}{2}$

$$I = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)] - \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

Trapézio composta: $h=(b-a)/N$; $x_i = a+ih$; N é o número de subintervalos.

$$\begin{aligned}
I = {}&\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+\\
&+2f(x_{N-2})+2f(x_{N-1})+f(x_N)] - \frac{h^2}{12}(b-a)f^{(2)}(\xi)
\end{aligned}$$

Simpson composta: $h=(b-a)/N; x_i = a+ih$; N é o número de subintervalos.

$$\begin{aligned}
I = {}&\frac{h}{3}[f(x_0)+4\{f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{N-1})\}+\\
&+2\{f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{N-2})\}+f(x_N)]-\\
&-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

Solução de equações não lineares:

$\alpha : f(\alpha)=0, \quad \alpha\in[a,b]$, $k=0,1,\ldots$

Multiplicidade m de um zero:

Definição:

$$\text{o maior } k : \lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)|}{|x-\alpha|^k} = c < \infty;$$

Teorema:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0.$$

Ordem de Convergência p: $e_k = \alpha - x_k$

$$\text{Definição: } 0 < m \le \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} \le M,\ \forall k\ge N$$

Bissecção: $\alpha \in [a_0, b_0]$,

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}; \quad |e_k| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Secante: Seja $f \in C^2[a,b]$, $\xi \in]a,b[$. x_{-1} e x_0 estimativas iniciais.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$|e_{k+1}| \leq M|e_k||e_{k-1}|; M = \frac{M_2}{2m_1}$$

onde $0 < m_1 \leq |f^{(1)}(\xi)| \leq M_1$ e $|f^{(2)}(\xi)| \leq M_2$

Newton-Raphson: x_0 estimativa inicial;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};$$

Condições de convergência (I): Seja $f \in C^2[a,b]$, $\xi \in]a,b[$. Se $0 < m_1 \leq |f^{(1)}(\xi)| \leq M_1$ e $|f^{(2)}(\xi)| \leq M_2$ então $|e_{k+1}| \leq M|e_k|^2$ com $M = \frac{M_2}{2m_1}$.

Condições de convergência (II): Seja $f \in C^2[a,b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, $f''(x)$ não muda de sinal em $[a,b]$, $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b - a$ e $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b - a$ então $x_k \to \alpha$ quando $k \to \infty$.

Ponto Fixo $x_{k+1} = g(x_k)$: Se para $x \in I = [a,b]$ se verifica $|g'(x)| < 1$ e $g(x) \in I$ então $x_{k+1} = g(x_k) \to \alpha$, $\forall x_0 \in I$. Se $g^{(1)}(\alpha) \neq 0$ obtem-se convergência linear; Se $g^{(1)}(\alpha) = 0$ e $g^{(2)}(\alpha) \neq 0$ a convergência é quadrática.

Sistemas de equações lineares

Matrizes: I é matriz identidade

$$\det(A - \lambda I) = 0; \qquad \rho(A) = \max\{|\lambda_i|\};$$

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ij}L_j \text{ em que } m_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$$

Matriz Definida Positiva (DefPos) A é DefPos se é simétrica e $x^T Ax > 0$;

Diagonal Estritamente Dominante por Linhas (d.e.d.p.l):

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Factorização LU: $A = LU$; $Ly = b$; $Ux = y$;

Factorização Choleski: $A = LL^T$; $Ly = b$;$L^T x = y$;

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{jm}^2}, j = 1, \ldots, n$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{im}l_{jm}}{l_{jj}}, \quad i > j$$

Teoremas:

Se A é DefPos então A é não singular e $a_{ii} > 0$;

A é DefPos $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0$ (com λ_i valores próprios de A);

Se A d.e.d.p.l então A não singular.

Normas:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|; \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

Número de Condição: $\text{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$;

Perturbações $Ax = b$:

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A)\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}; \qquad \frac{\|\delta_x\|}{\|x + \delta_x\|} \leq \text{cond}(A)\frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}$$

Métodos Iterativos:

$Ax = b$; $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$;

Condições de convergência (1): A d.e.d.p.l;

Condições de convergência (2): $\rho(M) < 1$;

Condições de convergência (3): $\|M\| < 1$. Neste caso,

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|M\|^k \|x - x^{(0)}\|;$$

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|M\|^k}{1-\|M\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

MATLAB: Nos comandos: x e y designam pontos ou vectores; xv e yv designam vectores.

```
% n pontos igualmente espaçados entre a e b:
yv = linspace(a,b,n)

%Spline linear:
y=interp1(xv,yv,x,'linear')

%Spline cubico (versao I):
y=interp1(xv,yv,x,'cubic')

%Spline cubico (versao II)
coef = spline(xv,yv)
y=ppval(coef,x)

%Valor de um polinómio em x
%com coeficientes dados pelo vector coef.
y=polyval(coef,x)

%Zero de uma função f, próximo de x0
x=fzero(f,x0)

%Integração numérica com regra dos trapézios
I=trapz(xv,yv)

%Funções sobre matrizes
det, inv, eig, cond, norm,
chol, lu, A\b, b';
```